Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: htpp://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

Aplicadores lineales sobre polinomios de variable real, como estrategia de enseñanza preuniversitaria

Rios Hernández Mynor* y Carvajal Herradora William

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León (UNAN-León)
Facultad de Ciencias y Tecnologías
Departamento de Matemática y Estadística
*email: riosmynor37@gmail.com

Recibido: 05/02/2019 Aceptado: 13/03/2019

Resumen: Se propone una extensión didáctica sobre uso de polinomios para la continuidad del estudio básico sobre las aplicaciones de funciones elementales tanto algebraicas como trascendentes en el preuniversitario, de manera que se obtenga un acercamiento previo e implícito con el cálculo infinitesimal, desarrollando en el estudiante habilidades matemáticas de derivación e integración de polinomios a través de los aplicadores lineales φ y ψ que realizan esta tarea respectivamente.

Palabras clave: Polinomio, Derivada, Integral, Aplicador Lineal, Función Transcendente, Serie de Potencia.

Summary: A didactic extension on the use of polynomials is proposed for the continuity of the basic study on the applications of both algebraic and transcendent elementary functions in the pre-university, so that a previous and implicit approach with the infinitesimal calculation is obtained, developing in the student mathematical skills of derivation and integration of polynomials through the linear applicators φ and ψ who perform this task respectively.

Keywords: Polynomial, Derivative, Integral, Linear Applicator, Transcendent Function, Power Series.

INTRODUCCIÓN

Durante el bachillerato, el estudiante obtiene un aprendizaje de manera técnica precisa; al plantearse problemas que involucran métodos matemáticos en la búsqueda de soluciones, a la postre logran infundir en el interesado una abstracción. En el estudio de contenidos en secundaria como son: factorización [2], funciones, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, trigonometría, geometría analítica [11], secciones cónicas y sólidos; se adquiere un abanico de métodos y técnicas que desarrollan en el estudiante cierta pericia para enfrentar problemas de la ciencia y del entorno. Un universitario o estudiante del preuniversitario, en las materias de Cálculo Infinitesimal ya pueden afrontar contenidos como son: Límite, Continuidad, Derivada e Integral, y es donde logra apreciar la diversidad de técnicas matemáticas para resolver problemas específicos de cualquier índole y encuentra aplicaciones en el diario vivir.

Un estudiante mientras estudia bachillerato, tiene restringido su campo de aplicaciones matemáticas por los temas que ya tienen designado, siendo que, al afrontar los polinomios, le surgen inquietudes tales como: ¿Para qué sirve un polinomio en el diario vivir? ¿Me será de utilidad alguna vez en mi profesión?

Es por lo anterior que se presenta esta propuesta como una aplicación adicional en el uso de polinomios, para que un bachiller amplíe un poco su destreza, sin necesidad de utilizar teoremas de mayor complejidad del Cálculo infinitesimal (Límite y Continuidad, Derivada, Integral, etc.). Así es que se propone una técnica que amplíe el estudio sobre polinomios de variable real, emulando métodos y aplicaciones del cálculo diferencial e integral de forma amigable, que permita implementarse al nivel del bachillerato o preuniversitario.

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

DISEÑO METODOLÓGICO

Aplicadores lineales polinómicos φ y ψ

Dado el polinomio de grado n: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ para n entero, y los coeficientes reales a_n, se define el aplicador lineal derivado $\varphi(P(x))$ y el aplicador lineal integrado $\psi\big(P(x)\big)$, a como sigue (se genera c como constante real).

$$\varphi\big(P(x)\big) = \varphi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$$

$$\psi\big(P(x)\big) = \psi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = c + a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$$

Así por ejemplo para la expresión $ax^k + b$, donde a y b son constantes reales distintas de cero y k es racional; se calcula $\varphi(ax^k + b) = akx^{k-1}$ y, $\psi(ax^k + b) = a\frac{x^{k+1}}{k+1} + bx + c$

Se presentan dos situaciones de polinomios en los que intervienen aquellos aplicadores (grados finito e infinito). Nótese que: la constante c solo será utilizada de manera arbitraria en las demostraciones de las propiedades, obtendrá el valor de cero cuando la Serie de Potencia comienza en cero, y vale uno o a_0 cuando la Serie de Potencia comienza en uno (al comparar la serie de potencia original que inicia en cero con su serie de potencia aproximada que inicia en uno, se deduce el valor de la constante como valor de condición inicial). A continuación, se condensan las propiedades que se expondrá más adelante

Propiedades de los aplicadores en polinomios finitos

1) $\psi(ax^k) = a\frac{x^{k+1}}{k+1} \leftrightarrow \varphi\left(a\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = (ax^k)$

2) $\varphi(ax^k) = akx^{k-1} \leftrightarrow \psi\big(akx^{k-1}\big) = ax^k$

3) $\psi(P(x)) = Q(x) \leftrightarrow \varphi\big(Q(x)\big) = P(x)$

4) $\varphi(P(x)) = Q(x) \leftrightarrow \psi\big(Q(x)\big) = P(x)$

Propiedades de los aplicadores en polinomios infinitos

1) $\psi(\mathrm{sen}(x)) = -\cos(x) \rightarrow \varphi(\cos(x)) = -\mathrm{sen}(x)$

2) $\varphi(\mathrm{sen}(x)) = \cos(x) \rightarrow \psi(\cos(x)) = \mathrm{sen}(x)$

3) $\psi(e^x) = e^x \rightarrow \varphi(e^x) = e^x$

4) $\varphi(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x} \rightarrow \psi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x)$

Demostración para la forma general en polinomios de grado finito:

$$\psi\big(P(x)\big) = \psi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \psi(a_0) + \psi(a_1x) + \ldots + \psi(a_nx^n)$$
$$= a_0\frac{x^{0+1}}{0+1} + a_1\frac{x^{1+1}}{1+1} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} = Q(x)$$

$$\varphi\big(Q(x)\big) = \varphi\left(a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \cdots + \frac{a_nx^{(n+1)}}{(n+1)}\right) = \varphi(a_0x) + \varphi(a_1\frac{x^2}{2}) + \cdots + \varphi(a_n\frac{x^{n+1}}{n+1})$$
$$= (1)a_0x^{1-1} + (2)a_1\frac{x^{2-1}}{2} + \cdots + (n+1)a_n\left(\frac{x^{(n+1)-1}}{(n+1)}\right) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = P(x)$$

$$\varphi\big(P(x)\big) = \varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1x) + \ldots + \varphi(a_nx^n)$$
$$= (0)a_0x^{0-1} + (1)a_1x^{1-1} + \cdots (n)a_nx^{n-1} = a_1 + \cdots + (n)a_nx^{n-1} = Q(x)$$

$$\psi\big(Q(x)\big) = \psi(a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^n) = \psi(a_1) + \psi(a_2x) + \cdots + \psi(a_nx^{n-1})$$
$$= c + a_1x + a_2\frac{x^2}{2} + \ldots + (n)a_n\frac{x^{(n-1)+1}}{(n-1)+1} = c + a_1x + a_2\frac{x^2}{2} + \ldots + (n)a_n\frac{x^n}{n}$$
$$= c + a_1x + a_2\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^n}{n} = P(x)$$

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

Aplicadores $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en series polinómicas infinitas o funciones trascendentes

Estas funciones especiales se expresarán en su forma polinómica:

Tabla 1. Funciones especiales

Funciones especiales	
$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \cdots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$
$\operatorname{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{(n+1)}$	

$\boldsymbol{\varphi(\operatorname{sen}(x)) = \cos(x)}$

$$\varphi(\operatorname{sen}(x)) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\varphi(x^{2k+1})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[(2k+1)x^{(2k+1)-1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k+1)-1)!} x^{((2k+1)-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x)^{2k} = \cos(x); \text{ por lo tanto } \varphi(\operatorname{sen}(x)) = \cos(x).$$

$\boldsymbol{\varphi(\cos(x)) = -\operatorname{sen}(x)}$

$$\varphi(\cos(x)) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\varphi(x^{2k})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k)(x^{2k-1}) \quad [k = 1,\ n+1 = k]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2k)(x^{2k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} (x^{2k-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x^{2n+1})$$

$$= (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^{2n+1}) = -\operatorname{sen}(x); \quad \text{por lo tanto } \varphi(\cos(x)) = -\operatorname{sen}(x).$$

$\boldsymbol{\psi(\cos(x)) = \operatorname{sen}(x)}$

$$\psi(\cos(x)) = \psi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \psi(x^{2k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + c$$

[sabiendo que $\operatorname{sen}(0) = 0$, pues resulta que $c = 0$]; por lo tanto, $\psi(\cos(x)) = \operatorname{sen}(x)$.

$\boldsymbol{\psi(\operatorname{sen}(x)) = -\cos(x)}$

$$\psi(\operatorname{Sen}(x)) = \psi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \psi(x^{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{(x^{2k+2})}{(2k+2)} + c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^{2k+2})}{(2k+2)!} + c =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}(x^{2n})}{(2n)!} + c = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{2n})}{(2n)!} + c = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^{2n})}{(2n)!}$$

[sabiendo que $\cos(0) = 1$, pues resulta que $c = 1$]

por lo tanto, $\psi(\operatorname{sen}(x)) = -\cos(x)$.

$\boldsymbol{\varphi(e^x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$

$$\varphi(e^x) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(k-1)}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad [\text{haciendo } k-1 = n]$$

por lo tanto resulta, $\varphi(e^x) = e^x$

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

$\boldsymbol{\psi(e^x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$

$\psi(e^x) = \psi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + c = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ [haciendo $k+1 = n$] , [nótese que $c = 1$]

$\psi(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ por tanto, $\psi(e^x) = e^x$

$\boldsymbol{\varphi(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}}$

$\varphi(\ln(1+x)) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \varphi\left(x^{(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left[(n+1)\left(x^{(n+1)-1}\right)\right]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} (n+1)\left(x^{(n+1-1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (x^n)$, [ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$]

por lo tanto, $\varphi(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$

$\boldsymbol{\psi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x)}$

$\psi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \psi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + c = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\mathbf{1+n}} x^{n+1}\right)$,

[Al comparar las series, $c = 0$] [como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{(n+1)} = \ln(1+x)$] , por lo tanto, $\psi\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x)$

De la demostración anterior es evidente que $\psi(\ln(u)) = \left(\frac{1}{u}\psi(u)\right)$ y $\varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \ln(u)$

RESULTADOS

Situación en polinomios de grado $\boldsymbol{n \geq 0}$: Sea $p(x) = ax^n$ un polinomio de un solo término, donde a es un valor constante. Al aplicar $\varphi(x)$ a este polinomio, es decir $\varphi\big(P(x)\big) = \varphi(ax^n)$ Se obtiene un polinomio $Q(x)$. Y al aplicar $\psi(x)$ al resultado $Q(x)$ vuelve al polinomio original. Luego de forma inversa, al aplicar $\psi(x)$ primero y $\varphi(x)$ al resultado vuelve al polinomio original. [Se comprueba en la demostración]

Sea $P(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$, y al aplicar $\varphi(x)$ a $P(x)$ se tiene que:

$\varphi(P(x)) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$, Luego $\varphi(P(x)) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1x) + \ldots + \varphi(a_nx^n)$

De igual manera para $\psi(x)$, resulta:

$\psi\,(P(x)) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$, Luego $\psi\,(P(x)) = \psi(a_0) + \psi(a_1x) + \ldots + \psi(a_nx^n)$

Ejemplo 1. $P(x) = x^6$

Sol. Aplicando Fi, entonces: $\varphi(x^6) = 6x^{6-1} = 6x^5$. [Luego: $\psi(6x^5) = x^6$].

Sol. Aplicando Psi, entonces: $\psi(x^6) = \frac{x^{6+1}}{6+1} = \frac{X^7}{7} + c$ [Luego: $\varphi(\frac{X^7}{7} + c) = X^6$].

[El valor de condición inicial c es cero]

Ejemplo 2. Sea $P(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$, encontrar $Q(x)$ para cada aplicador $\varphi(x)$ y $\psi(x)$: $\varphi\big(P(x)\big) = \varphi(2x^3 + x^2 + x + 1) =$

$\varphi(2x^3) + \varphi(x^2) + \varphi(x) + \varphi(1)$

$= (3)2x^{3-1} + (2)x^{2-1} + (1)x^{1-1} + (0)\,x^0 = 6x^2 + 2x + 1 = Q(x)$. [Se puede comprobar $\psi(Q(x))$]

$\psi\big(P(x)\big) = \psi(2x^3 + x^2 + x + 1) = \psi(2x^3) + \psi(x^2) + \psi(x) + \psi(1)$

$= 2\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + \left(\frac{x^{0+1}}{0+1}\right) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c = Q(x)$ [Se puede comprobar $\varphi(Q(x))$]

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

Ejemplo 3. Supóngase que se tiene un patio delimitado por la función $y = 9 - X^2$, con la media en metros. Encontrar el área utilizando el aplicador polinómico $\psi(x)$.

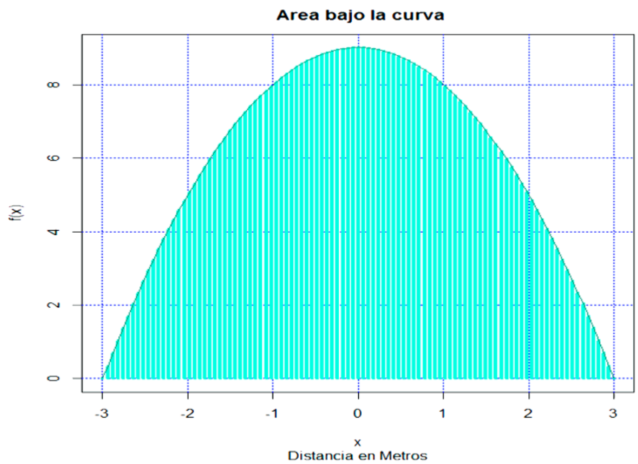

Figura 1. Función cuadrática

Resolviendo la Ecuación $9–x^2 = 0$, se tiene como solución,

$x = -3$ y $x = 3$, entonces el área resulta ser

$$A = \psi(9 - x^2) = \psi(9) - \psi(x^2) = 9\left(\frac{x^{0+1}}{0+1}\right) - \frac{x^{2+1}}{2+1} = 9x - \frac{X^3}{3}:$$

Ahora sustituyendo los valores obtenidos y restando:

$$A = \left[9(3) - \frac{(3)^3}{3}\right] - \left[9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right] = 18 - (-18) = 36\ \mathrm{m}^2$$

Ejemplo 4. La ecuación de la velocidad de un móvil está dada por $V(t) = 3t^2 - 4t + 5$, donde V se mide en metros/segundos. Determinar la aceleración del objeto cuando $t = 3$.

Se obtiene la ecuación de la aceleración, aplicando $\varphi(x)$ a la velocidad.

$a(t) = \varphi(V(t)) = \varphi(3t^2) - \varphi(4t) + \varphi(5) \rightarrow\ a(t) = 6t - 4$, y como $t = 3$, entonces:

$a(3) = 6(3) - 4 = 18 - 4 = 14\ m/s$

Así, la aceleración del móvil cuando han transcurrido 3 segundos es de $14\ m/s$.

Ejemplo 5. Utilizar el aplicador lineal derivacional $\varphi(x)$, para aproximar las raíces de un polinomio. El método de Newton-Raphson es un algoritmo para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real, tomando un valor inicial suficientemente cercano a la raíz buscada.

Aproximar las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + x - 1$, con $p(x) = 0$, y tomar como valores iniciales: $x_0 = -1$ para la solución de la izquierda y $x_0 = 1$ para la derecha, a cuatro iteraciones. Se emulará con la propuesta de Newton que parte del polinomio de Taylor: $x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{\boldsymbol{\varphi}(p(x_i))}$ Por la derecha: entonces $x_1 = x_0 - \frac{{x_0}^2+x_0-1}{2x_0+1} = \frac{{x_0}^2+1}{2x_0+1} = \frac{(-1)^2+1}{2(-1)+1} = -2$; $x_2 = \frac{(-2)^2+1}{2(-2)+1} = -\frac{5}{3} = -1.67$, $x_3 = \frac{(-\frac{5}{3})^2+1}{2(-\frac{5}{3})+1} = \frac{\frac{34}{9}}{-\frac{7}{3}} = -\frac{34}{21} = -1.61905$; $x_4 = \frac{(-34/21)^2+1}{2(-34/21)+1} = -\frac{\frac{1597}{441}}{\frac{-47}{21}} = -\frac{233}{144} = -1.618056$

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

por la izquierda: $x_1 = \frac{(1)^2+1}{2(1)+1} = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{(\frac{2}{3})^2+1}{2(\frac{2}{3})+1} = \frac{\frac{4}{9}+1}{(\frac{4}{3})+1} = \left(\frac{13}{9}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{21} = 0.619,$

$$x_3 = \frac{(\frac{13}{21})^2+1}{2(\frac{13}{21})+1} = \frac{\frac{169}{441}+1}{(\frac{26}{21})+1} = \frac{\frac{610}{441}}{\frac{47}{21}} = \frac{610}{21*47} = \frac{55}{89} = 0.618,\ \ x_4 = \frac{(55/89)^2+1}{2(55/89)+1} = \frac{\frac{10946}{7921}}{\frac{199}{89}} = \frac{31239}{50546} = 0.61803$$

Observe las fracciones que se generan, sin importar el signo, se relacionan a la secuencia de Fibonacci {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,…}, pues la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, se relaciona con la razón aurea (a+b)/a = a/b, de donde a/b – b/a = 1; luego para a = x y b = 1, se obtiene $x^2 - x - 1 = 0$; ambas ecuaciones son simétricas respecto al eje vertical, al graficarlas como funciones.

Ejemplos de aplicación φ y ψ en polinomios infinitos.

Ejemplo 6. Un cuerpo que está oscilando con posición al tiempo t está dada por $s(t) = 10\cos\frac{\pi}{6}t$ donde t se mide en segundos y $s(t)$ en centímetros, describir el movimiento.
Solución: es un movimiento armónico simple, con periodo $w = \frac{\pi}{6}$, entonces $\frac{2\pi}{w} = 12$, hay una oscilación completa cada 12 segundos, y la frecuencia es $\frac{w}{2\pi} = \frac{1}{12}$ es decir que hay $\frac{1}{12}$ de oscilación por segundo.

Se analizará el movimiento en el intervalo de tiempo [0, 12] entonces la función de velocidad y aceleración son:
$v(t) = \varphi(s(t))$ y $a(t) = \varphi(v(t))$, dado que $v(t) = \varphi\left(10\cos\frac{\pi}{6}t\right) = 10\left(-\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{3}\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}t$

, y $a(t) = \varphi\left(-\frac{5\pi}{3}\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}t\right) = -\frac{5\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi^2}{18}\cos\frac{\pi}{6}$, es observable que la velocidad se anula en $t = 0, t = 6, t = 12$, y la aceleración en $t = 3, t = 9$.

Polinomios de grado $n < 0$, $[n \neq -1]$:
Sea $p(x) = ax^{-n}$ un polinomio de un solo término, donde a es un valor constante. Al aplicar $\varphi(x)$, es decir $\varphi(P(x)) = \varphi(ax^{-n})$ se obtendrá $Q(x)$.
Y al aplicar $\psi(x)$ al resultado $Q(x)$ volvemos a polinomio original. Luego viceversa al aplicar $\psi(x)$ primero y $\varphi(x)$ al resultado volvemos al polinomio original.
En el caso de aplicar $\psi(x)$ a un polinomio de exponente: $n = -1$, es decir ax^{-1} se obtiene un resultado no satisfactorio. Entonces:

¿Qué se puede hacer?
Por la demostración, en el caso $n = -1$, la aplicación $\psi(P(x))$ existe, debido a que: $\psi(u^{-1}) = \psi\left(\frac{1}{u}\right) = \ln(u)$

Y luego, nuevamente gracias a la demostración ya mencionada se garantiza que: $\varphi(\ln(u)) = \left(\frac{1}{u}\right)$

[Solo para polinomios finitos con: $a = 1$ y $n = -1$]

Aplicadores $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en series polinómicas infinitas o funciones trascendentes especiales
Estas funciones trascendentes intervienen los números de Euler y Bernoulli, y se generalizan:

$$\tan(X) = \frac{X}{1!} + 2\frac{X^3}{3!} + 16\frac{X^5}{5!} + 272\frac{X^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)X^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\sec(X) = 1 + \frac{X^2}{2!} + 5\frac{X^4}{4!} + 61\frac{X^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}(-1)^nX^{2n}}{(2n)!}$$

Donde los valores E_{2n} y B_{2n} son respectivamente los números de Euler y Bernoulli, los cuales se definen:

Euler: $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$,… Bernoulli: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$,… para ambos respectivamente los E_k y B_k con k impar son triviales, a conveniencia k=2n, n=0,1,…

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, León

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

Se probará $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ para la $\tan(X)$ y $\sec(X)$, a conveniencia se simplifican las series:

$$\tan(X) = X + \frac{X^3}{3} + 2\frac{X^5}{15} + 17\frac{X^7}{315} + \cdots \qquad \sec(X) = 1 + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720} + \cdots$$

a precisión de los cuatro primeros términos, y obsérvese que:

$$\sec^2(X) = \sec(X) * \sec(X) = \left(1 + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720}\right)\left(1 + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720}\right)$$

$= 1 + X^2 + 3\frac{X^4}{2} + 17\frac{X^6}{45}$, y también: $\sec(X) * \tan(X) = \left(1 + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720}\right) * \left(X + \frac{X^3}{3} + 2\frac{X^5}{15} + 17\frac{X^7}{315}\right) = X + \frac{5X^3}{6} + 61\frac{X^5}{205} + 277\frac{X^7}{1008}$, se utilizarán estos resultados para realizar las pruebas mencionadas.

$\boldsymbol{\varphi(\tan(x)) = \sec^2(X)}$

$$\varphi(\tan(x)) = \varphi\left(X + \frac{X^3}{3} + 2\frac{X^5}{15} + 17\frac{X^7}{315}\right) = \varphi(X) + \varphi\left(\frac{X^3}{3}\right) + 2\varphi\left(\frac{X^5}{15}\right) + 17\varphi\left(\frac{X^7}{315}\right)$$

$= 1 + X^2 + 2\frac{X^4}{3} + 17\frac{X^6}{45}$, por lo tanto $\varphi(\tan(x)) = \sec^2(X)$

$\boldsymbol{\psi\left(\sec^2(x)\right) = \tan(X)}$

$$\psi\left(1 + X^2 + 2\frac{X^4}{3} + 17\frac{X^6}{45}\right) = \psi(1) + \psi(X^2) + 2\psi\left(\frac{X^4}{3}\right) + 17\psi\left(\frac{X^6}{45}\right) = c + X + \frac{X^3}{3} + 2\frac{X^5}{15} + 17\frac{X^7}{315}$$

Con c = 0, por lo tanto $\psi\left(\sec^2(x)\right) = \tan(X)$

$\boldsymbol{\varphi(\sec(x)) = \sec(X) * \tan(X)}$

$\varphi(\sec(x)) = \varphi\left(1 + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720}\right) = \varphi(1) + \varphi\left(\frac{X^2}{2}\right) + 5\varphi\left(\frac{X^4}{24}\right) + 61\varphi\left(\frac{X^6}{720}\right) = X + 5\frac{X^3}{6} + 61\frac{X^5}{120} + 277\frac{X^7}{1008}$; por lo tanto $\varphi(\sec(x)) = \sec(X) * \tan(X)$

$\boldsymbol{\psi\left(\sec(X) * \tan(X)\right) = \sec(X)}$

$$\psi\left(X + 5\frac{X^3}{6} + 61\frac{X^5}{120} + 277\frac{X^7}{1008}\right) = \psi(X) + 5\psi\left(\frac{X^3}{6}\right) + 61\psi\left(\frac{X^5}{120}\right) + 277\psi\left(\frac{X^7}{1008}\right)$$

$= c + \frac{X^2}{2} + 5\frac{X^4}{24} + 61\frac{X^6}{720} + 277\left(\frac{X^8}{8064}\right)$. Aquí c = 1, por lo tanto $\psi\left(\sec(X) * \tan(X)\right) = \sec(X)$

CONCLUSIÓN

Se evidencia que la deducción y aplicación de cada función trascendente propuesta, no amerita el abordaje de la temática de derivadas e integrales, ni aun de límite y continuidad. Es por lo cual que puede darse un acercamiento previo e implícito con el cálculo infinitesimal, a estudiantes de secundaria, desarrollando en ellos habilidades matemáticas para la resolución de problemas en la búsqueda de puntos óptimos y el cálculo de velocidades, áreas y volúmenes, entre otros.

UNIVERSITAS (LEÓN)
Vol. 10 (1) julio 2019, pp 1-8
Revista Científica de la UNAN-León
doi: http://dx.doi.org/10.56258/ree.22-3.1
ISSN electrónico 2311-6072
ISSN impreso 2071-257X

BIBLIOGRAFÍA

Alagia, H., Bressan , A., & Sadovsky, P. (2005). Reflexiones teóricas para la Educación Matemática (Primera Edición ed.). (O. Kulesz, Ed.) Buenos Aires, Argentina, Argentina: Libros del Zorzal.

Baldor, D. A. (1997). Algebra A. Baldor. Mexico DF: Publicaciones Cultura.

Bretón, D. J. (2008). Numeros de Bernoullí: Un estudio sobre su importancia, consecuencias y algunas aplicaciones en la Teoría de Números. Mexico D.F.

Burden, R. L., & J. Douglas Faires. (2010). Numerical Analysis (Ninth Edition ed.). Boston, U.S.A: Copyright Act.

Cantoral Uriza, D. R. (2016). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa; Estudios sobre construccion social del conocimiento (Segunda Edición ed.). Maxico DF, Mexico: Editorial Gedisa, SA.

Casimiro, M. P. (s.f.). Análisis de Series Temporales: Modelos ARIMA.

Gobran, A. (1990). Algebra Elemental. (N. G. P., Ed., & E. Ojeda, Trad.) Mexico DF, Mexico: Grupo Editoria Iberoamericana, SA.

Marquéz, G. (2008). Diferentes presentaciones de los polinomios de bernoullí. Caracas, V.

Mauricio, J. A. (s.f.). Introducción al Análisis de Series Temporales. Madrid, España, España.

Rehermann, C. S. (1985). Matemática Básica Superior. (J. M. Prietoguez, Ed.) La Hbana, Cuba, Cuba: Editorial Científico-Técnica.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar Matemática Hoy. Miradas, sentidos y desafios (Primera Edición ed.). (O. Kulesz, Ed.) Buenos Aires, Argentina, Argentina: Libros del Zorzal.

w.Swokowki, E. (s.f.). Cálculo con Geometría Analitica (Segunda Edición ed.). (D. J. Abreu, & M.sc Martha Olivero, Trads.) Mexico DF, MEXICO: Grupo Editorial Iberoamericana, SA.

Zill, D. G. (1897). Cálculo con Geometria Analitica. (N. G. P., Ed., & E. O. Peña, Trad.) MEXICO DF.: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A de C.V.

Zill, D. G. (1997). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. (6ta ed.). (C. C. Campillo, Ed.) Mexico DF.: International Thomson Editores.